Raphael Kobler, 10a
GFS IMP Mathematik: Chaotische Systeme
Datum
Lehrer: Herr Fischer

Chaotische Systeme

1. Was ist ein chaotisches System?

Die Chaosforschung findet ihren Ursprung in der Physik, wo bereits im neunzehnten Jahrhundert nach expliziten Formeln gesucht wurde, um die Bewegung von beliebig vielen Planeten zu beschreiben, die sich gegenseitig anziehen. Eine Berechnung durch die damals bereits bekannten rekursiven Formeln gestaltete sich als äußerst aufwendig, und war bei zu großen Zeitschritten mit Präzisionsverlusten verbunden.
Dieses Problem ist heute als „N-Körper-Problem“ bekannt, wobei für Systeme aus mehr als zwei Körpern noch immer keine Lösung bekannt ist.

Viele Mathematiker vermuten, dass es überhaupt keine Lösung gibt, auch da explizite Formeln selten den Merkmalen von N-Körper Systemen entsprechen:

Explizite Formeln reagieren auf eine kleine Änderung der Parameter in der Regel durch eine ähnlich große Änderung des Funktionswertes, während eine kleine Veränderung an z.B. der Position der Planeten in einem Sonnensystem mit der Zeit zu einer immer größeren Abweichung führt (Butterfly Effect). Diese Eigenschaft ist das Hauptmerkmal eines chaotischen Systems.

Mathematisch betrachtet sind chaotische Systeme rekursive Gleichungssysteme, bei welchen eine kleine Veränderung der Parameter zu einer großen Änderung des Verhaltens führen kann. Mit solchen Gleichungssystemen lassen sich komplexe Sachverhältnisse aus der realen Welt modellieren.

Die Chaosforschung lässt sich mathematisch als Teilgebiet der Dynamik oder physikalisch als Teil der Mechanik kategorisieren.

2. Die logistische Gleichung

Im Folgenden wird eine Variante der logistischen Gleichung behandelt, eine rekursiv definierte Funktion:

$$x_{n+1} = r * x_n * (1 - x_n)$$

Sie ähnelt der rekursiven Darstellung der logistischen Funktion, die bereits im Unterricht behandelt wurde, ist jedoch nur von der Wachstumsvariablen r abhängig.

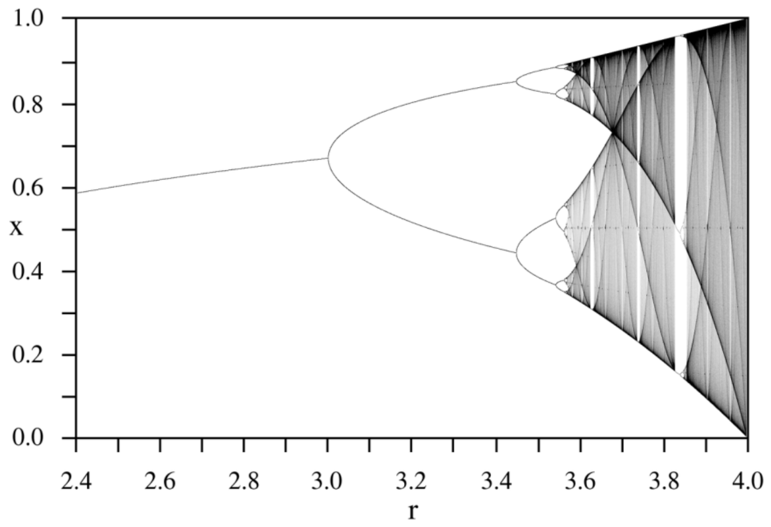
Der Grenzwert der Iteration ist außerdem unabhängig vom Anfangswert, solange dieser zwischen 0 und 1 liegt. (Für $x_1 = 0$ ist x_n immer 0, für $x_1 \geq 1$ divergiert die Funktion)

Über den Grenzwert von x in Abhängigkeit von r lassen sich folgende Aussagen treffen:

1. Für $r < 1$ konvergiert x immer zu 0.
2. Für r zwischen 1 und 3 nähert sich x dem Grenzwert $\frac{r-1}{r}$ an.
3. Ab $r = 3$ gibt es keinen klaren Grenzwert mehr! Ab hier wechselt der Wert immer zwischen zwei verschieden Punkten.
4. Ab $r \approx 3.45$ wechselt der Wert zwischen vier verschiedenen Punkten, mit größerem r beträgt das Intervall bald $8, 16, 32\ldots$
5. Ab $r \approx 3.57$ verhält sich der Grenzwert chaotisch, die Intervalle verschmelzen so sehr ineinander, dass sich kein klares Muster mehr erkennen lässt.
6. Ab $r = 4$ divergiert die Funktion.

3. Bifurkationsdiagramme und die Feigenbaumkonstante

Das chaotische Verhalten der logistischen Gleichung lässt sich durch ein Diagramm visualisieren, das die Grenzwerte von x abhängig von r in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellt. Daraus ergibt sich das folgende Bild:



Die Stellen an denen sich der Grenzwert scheinbar „aufspaltet“ werden Bifurkationen genannt, Bei dem Diagramm handelt es sich demnach um ein Bifurkationsdiagramm. Gut zu erkennen ist die periodische Verkürzung des Bifurkationsintervalls, sowie der Übergang ins Chaos bei $r \approx 3.57$.

Im Jahre 1975 befasste sich der US-amerikanische Physiker Mitchell Feigenbaum mit den Bifurkationen der logistischen Gleichung, und bewies dass der Abstand zweier aufeinander folgenden Bifurkationen auf einen bestimmten Wert konvergiert. Nach ihm wird diese Konstante „Feigenbaumkonstante“ genannt.

Die Feigenbaumkonstante taucht auch bei der Iteration anderer Gleichung und in der realen Welt auf, sodass ihre Bedeutung in der Chaosforschung häufig mit der Bedeutung der Zahl π für die Geometrie verglichen wird. Ihr Zahlenwert beträgt ungefähr 4.669.

Es existiert eine zweite Feigenbaumkonstante, ihre Definition ist jedoch deutlich komplizierter. Außerdem findet sie nur in sehr speziellen Fällen Anwendung, etwa bei der Untersuchung von turbulenten Strömungen in Flüssigkeiten.

4. Imaginäre Zahlen

Imaginäre Zahlen sind eine Zahlenart, die kein Teil der realen Zahlen ist und diese auch nicht enthält. Alle Eigenschaften der imaginären Zahl lassen sich aus einer einfachen Formel ableiten:

$$i^2 = -1$$

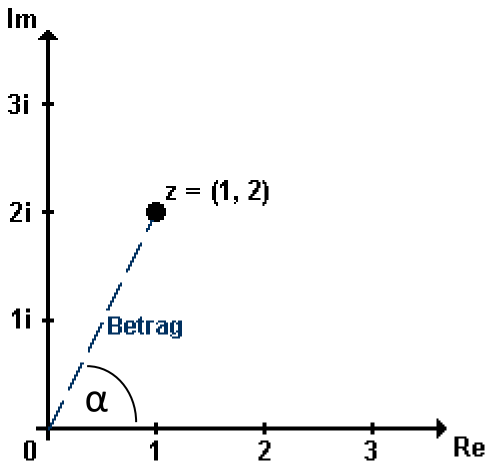
i stellt hier keine normale Variable da, sondern die *imaginäre Einheit*. Alle anderen imaginären Zahlen sind vielfache dieser Zahl, also Produkte aus einer realen Zahl und der imaginären Einheit.

5. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen sind Summen aus reellen und imaginären Zahlen. Sie lassen sich wie folgt darstellen:

$$a + bi$$

Die Menge der komplexen Zahlen enthält alle reellen und alle imaginären Zahlen, was bedeutet, dass sich komplexe Zahlen nicht auf einem einzelnen Zahlenstrahl zeichnen lassen. Stattdessen wird ein sogenanntes komplexes Koordinatensystem verwendet:



Hier werden die reellen und die komplexen Komponenten separat betrachtet. Alternativ können komplexe Zahlen auch durch ihren Betrag und einen Winkel, häufig als *Phase* bezeichnet, definiert werden. Der Betrag lässt sich analog zu dem eines Vektors berechnen:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Komplexe Addition wird ähnlich wie bei Vektoren durch einfaches Umformen nach dem Kommutativgesetz bewerkstelligt, komplizierter verhält es sich bei der Multiplikation:

$$(\mathrm{a} + \mathrm{bi}) * (\mathrm{c} * \mathrm{di}) =$$

$$(a * c - b * d) + i * (a * d + b * c)$$

Hier wird das Distributivgesetz angewendet, um alle Komponenten miteinander zu verrechnen. Dies ist auch der Grund, warum für Vektoren zwar Addition möglich ist, aber keine Multiplikation: Bei der Addition werden die äquivalenten Komponenten einzeln addiert, während bei der Multiplikation zweier Vektoren beispielsweise die x-Komponente des ersten Vektors mit der y-Komponente des zweiten Vektors verrechnet werden müsste. Bei Operationen auf Zahlen verschiedener Dimensionen ist Mathematisch nicht definiert, welcher Menge die Lösung angehören würde.

Eine weitere interessante Eigenschaft der komplexen Multiplikation: Werden zwei komplexe Zahlen multipliziert, ist die Phase des Produkts die Summe der Phasen der beiden Faktoren.

Die Zahl 0 ist die einzige Zahl, die gleichzeitig ein Element der reellen und der imaginären Zahlen ist.

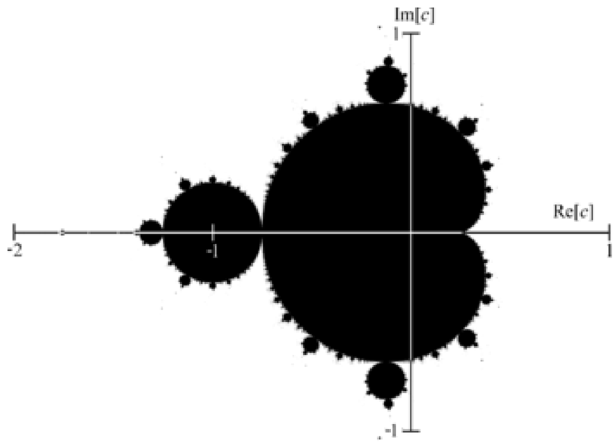
6. Die Mandelbrotmenge

Die Mandelbrotmenge ist die Menge aller komplexer Zahlen c, für die die folgende rekursive Gleichung konvergiert:

$$z_{n+1} = z^2 + c, \qquad z_0 = 0$$

Die Mandelbrotmenge ist nach ihrem Erfinder, dem Mathematiker Benoît Mandelbrot benannt.

Färbt man in einem komplexen Koordinatensystem jeden Punkt schwarz, wenn die Funktion für ihn konvergiert, und weiß, falls sie divergiert, erhält man das folgende Bild:



Die Mandelbrotmenge ist ein Fraktal, und wenn man die Stellen außerhalb der Menge nach der Anzahl an Iterationen einfärbt, bis c einen bestimmten Wert überschreitet, können sich viele interessante Muster ergeben.

7. Zusammenhänge

Man kann auch anhand der Mandelbrotmenge die Feigenbaumkonstante berechnen, wenn man einen Bifurkationsgraphen für die Werte auf der reellen Achse zeichnet, doch die Ähnlichkeiten gehen deutlich tiefer:

Wenn man die Parameter der logistischen Gleichung auf den Bereich der komplexen Zahlen erweitert, und ein Diagramm wie bei der Mandelbrotmenge zeichnet, erhält man eine gespiegelte Version des gleichen Bildes. Das lässt sich darauf zurückführen, dass beide Funktionen im Grunde quadratische Abbildungen mit einem Wachstumsparameter sind.

Quellen:

youtu.be/ovJcsL7vyrk

mathe-vital.de/Indras/2-2.html

de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung

projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1104201823

de.wikipedia.org/wiki/Imaginäre_Zahl